

**Пояснення до завдань з математики пробного тестування «ЗІГЗАГ»-2011**

**1. Д**

**Пояснення:** до натуральних чисел відносяться ті числа, які використовуються для лічби (1,2,3,4,...). Числа -2 і 0 відносяться до цілих (...,-2,-1,0,1,2,...). Число 3,5, що є десятковим скінченним дробом, відноситься до раціональних чисел (числа, що можна виразити як дріб із цілим чисельником та натуральним знаменником). Число  $\pi$  є ірраціональним числом, тобто належить лише множині дійсних чисел (усі числа, які можна виразити за допомогою  $+$   $-$   $*$   $:$   $()$  та кореня  $n$ -ого степеня).

**Примітка:** у Франції, наприклад, правильною відповіддю на це питання була б літера Б, адже там вважають, що 0 – натуральне число. Але це, скоріше, виняток. В Україні, як і в більшості країн світу, вважають, що 0 не належить до натуральних чисел.

**2. В**

**Пояснення:** це завдання можна розв'язувати по-різному. Найпростіший спосіб: скористатися наступною властивістю коренів:  $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . Отримуємо:  $\sqrt[3]{216} = 6$ .

**3. А**

**Пояснення:** це завдання можна розв'язувати двома способами. Перший: скористатися формулою:  $a_n = a_1 + (n-1)d$  та розв'язати отриману систему: 
$$\begin{cases} a_1 + 2d = 2 \\ a_1 + 6d = 7 \end{cases}$$

Отримуємо:  $a_1 = -0,5; d = 1,25$ . Тоді:  $a_5 = a_1 + 4d = 4,5$ . Другий: скористатися менш відомою, але більш ефективною в даній ситуації формулою (видозмінена характеристична властивість арифметичної прогресії):  $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ . Одразу

отримуємо:  $a_5 = \frac{a_3 + a_7}{2} = 4,5$ .

**4. Д**

**Пояснення:** важливо пам'ятати, що вдруге було звільнено не 50% від загальної кількості працівників, а 50% від тієї кількості, ЩО ЗАЛИШИЛАСЬ після першого звільнення. Отже, вперше було звільнено 25%, тобто четверта частина працівників: 14 людей. Залишилось 42 працівники. Після цього була звільнена ще половина з них: 21 людина. Тобто, залишилась працювати 21 людина.

**5. Б**

**Пояснення:** якщо кількість дівчат відноситься до кількості хлопців як 7:2, то можна позначити їхні кількості як  $7x$  та  $2x$  відповідно. Отже, загальна кількість репетиторів буде дорівнювати  $9x$ . А, отже, повинна ділитися націло на 9. Серед наведених чисел тільки 63 ділиться на 9 без остачі.

**6. А**

**Пояснення:** для розв'язання потрібно скористатися властивостями коренів:

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}; \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0$ . Тоді отримуємо:  $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}}{a} = \frac{\sqrt[6]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ . А далі

потрібно згадати зв'язок між коренями та степенями:  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ .

**7. Д**

**Пояснення:** показникова функція завжди приймає додатні значення ( $a^x > 0$ ), а, отже, дана нерівність буде виконуватися при будь-яких дійсних  $x$ .

**8. Д**

**Пояснення:** загальна кількість дівчат, які приймали участь в приваблинні, дорівнює 20. Отже, 10 дівчат, які сподобалися Вові, складають половину загальної кількості або 50%. Тому залишаються можливими два варіанти: А та Д. Однак, на діаграмі А видно,

що дівчата, які сподобалися Олегу, складають четверту частину (або 25%), але 6 дівчат складають 30% від 20, а, отже, правильним є варіант «Інша відповідь».

**9. Б**

**Пояснення:** для розв'язання цього завдання потрібно згадати формулу для площі круга:  $S = \pi R^2$ . Звідси легко знайти радіус кола: 6 см. Тоді довжина кола розраховується за формулою:  $C = 2\pi R = 12\pi$  см.

**10. Д**

**Пояснення:** найпростіше розв'язання такого завдання для невеликих чисел: виписати усі такі числа, що задовольняють вказаній умові: 13, 15, 17, 19, 31, 35, 37, 39. Усього таких чисел 8, а 37 серед них – одне. Отже, за означенням ймовірності:  $p = \frac{1}{8}$ .

**11. А**

**Пояснення:** для того, щоб виразити  $c$ , потрібно згадати правило пропорцій:  $\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow xn = my$ . А також те, що:  $a = \frac{a}{1}$ , звідки:  $2a = b + c \Rightarrow c = 2a - b$ .

**12. Б**

**Пояснення:** спочатку зазначимо, що дві означені книги можна розташувати на полиці 4 способами (переконайтеся в цьому самостійно), а ті 3, що залишилися, можна розмістити ще  $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  способами. Отже, загальна кількість способів дорівнює  $4 \cdot 6 = 24$  способи.

**13. Б**

**Пояснення:** це рівняння легко звести до найпростішого:  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , яке має такий розв'язок:  $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$ . Залишилось підставляти різні значення  $n$  та рахувати – скільки точок потрапить до заданого проміжку.

**14. Д**

**Пояснення:** для того, щоб порівнювати дроби, потрібно звести їх до спільного знаменника. В даному випадку цей знаменник дорівнює 36 (адже 36 ділиться націло і на 3, і на 9, і на 12). Тоді можна представити дані числа в наступному вигляді:  $\frac{60}{36}; \frac{57}{36}; \frac{64}{36}$ . А далі потрібно пам'ятати, що при рівних знаменниках: чим більше чисельник, тим більший дріб.

**15. А**

**Пояснення:** якщо Ви забули формулу для кількості діагоналей опуклого  $n$ -кутника ( $\frac{n(n-3)}{2}$ ), то радимо Вам просто намалювати та порахувати кількість діагоналей, адже в тестуванні нікого не цікавить – яким саме способом Ви отримали правильну відповідь.

**16. Г**

**Пояснення:** згадаємо означення парної функції: це функція із симетричною відносно 0 областю визначення, для якої виконується рівність:  $f(-x) = f(x)$ . Отже, показникова функція (Д) не підходить під це визначення хоча б тому, що має несиметричну відносно 0 область визначення, синус (В) є непарною функцією (з простих тригонометричних функцій тільки косинус є парною функцією), функції (А) та (Б) також є непарними (оскільки змінюють свій знак при зміні знака аргументу). Залишається варіант (Г).

**Примітка:** дуже часто при розв'язанні подібних завдань потрібно знати наступні властивості парних та непарних функцій: графік непарної функції симетричний відносно початку координат, а графік парної функції – відносно осі  $Oy$ .

**17. Б**

**Пояснення:** згадаємо критерій перпендикулярності двох векторів: їхній скалярний добуток повинен дорівнювати 0. Запишемо це в координатах для заданих векторів:  $2 \cdot (-5) + m \cdot 2 = 0$ , звідки  $m=5$ .

#### 18. В

**Пояснення:** для розв'язання цього завдання потрібно знати два факти про прямокутні трикутники: теорему Піфагора ( $c^2 = a^2 + b^2$ , де  $c$  – довжина гіпотенузи) та властивість медіани, що проведена до гіпотенузи (а саме: що вона дорівнює радіусу описаного навколо трикутника кола і дорівнює половині гіпотенузи).

#### 19. Б

**Пояснення:** геометричний зміст похідної функції в точці: вона дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в цій точці до осі  $Ox$ . Отже, оскільки кут нахилу дорівнює  $45^\circ$ , то похідна в цій точці дорівнює  $\tan 45^\circ$ .

#### 20. Б

**Пояснення:** об'єм конуса можна розрахувати за формулою:  $V = \pi R^2 H$ , де  $R$  – радіус основи,  $H$  – висота конуса. Отже, якщо радіус основи маленької фігури зменшився в 10 разів, то його квадрат – в 100 разів, а ще – в 20 разів зменшилась висота конуса. Отже, загальний об'єм маленької фігури менше об'єму початкової фігури в 2000 разів і дорівнює  $0,1 \text{ м}^3$ .

#### 21. В

**Пояснення:** з одного боку, можна використати той факт, що апліката точки (координата  $z$ ) – це і є відстань від точки до площини  $XOY$ . Але можна скористатися і тим, що проекція точки  $M(a;b;c)$  на площину  $XOY$  матиме вигляд  $N(a;b;0)$ . А тоді скористатися формулою для відстані між двома точками:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

#### 22. Г

**Пояснення:** формула для об'єму куба з ребром  $a$  має вигляд:  $V = a^3$ . Отже: оскільки ребро зменшилося на 20%, тобто стало дорівнювати  $0,8a$ , об'єм став дорівнювати:  $0,512a^3$ . А, отже, зменшився на 48,8%. Якщо у Вас викликає труднощі робота з виразами, то можна взяти ребро куба за 100. Тоді після зменшення воно дорівнюватиме 80, а далі за тією ж схемою.

#### 23. Г

**Пояснення:** оскільки  $BL$  – бісектриса, тобто ділить відповідний кут навпіл, то легко можна знайти кут:  $\angle LBC = 60^\circ$ . А далі треба скористатися теоремою косинусів для трикутника  $BLC$ :  $LC^2 = LB^2 + BC^2 - 2LB \cdot BC \cdot \cos \angle LBC$ .

#### 24. Д

**Пояснення:** твердження (а) легко перевірити, якщо згадати формулу для абсциси вершини параболи:  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ . Твердження (б) ми вже формулювали в примітці до завдання 15. Твердження (с), (д) – також є відомими фактами зі шкільного курсу, які варто пам'ятати (зокрема: рівняння кола:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ ). Що стосується твердження (е), то необхідно пам'ятати, що степені із дробовими показниками визначені лише для додатних основ.

#### 25. В

**Пояснення:** твердження (а) та (д) легко перевірити, якщо згадати означення прямокутного паралелепіпеда та піраміди. Що стосується інших двох тверджень, то конус утворюється при обертанні прямокутного трикутника навколо будь-якого з катетів, а в результаті обертання півкулі навколо осі симетрії можна отримати лише півкулю.

26.

	А	Б	В	Г	Д
1					X
2		X			
3			X		
4				X	

**Пояснення:** треба скористатися: означенням степеня з дробовим показником:  $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ ; тим, що будь-яке число в нульовому степені дорівнює 1:  $11^0 = 1$ ; тим, що  $(-1)$  в парному степені перетворюється на 1:  $(-1)^{52} + 2 = 1 + 2 = 3$ ; та згадати, що:  $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$ .

27.

	А	Б	В	Г	Д
1		X			
2					X
3	X				
4				X	

**Пояснення:** арксинус визначений лише тоді, коли значення його аргументу належать проміжку  $[-1;1]$ . Отже, потрібно розв'язати нерівність:  $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$ . Синус визначений при будь яких значеннях аргументу, а, отже, область визначення синуса збігається з множиною дійсних чисел (варто зазначити, що на це не впливають будь які коефіцієнти біля  $x$ ). Квадратний корінь визначений тоді і тільки тоді, коли підкореневий вираз приймає невід'ємні значення, тобто треба було розв'язати нерівність:  $x - 4 \geq 0$ . ОДЗ четвертого виразу складається з перетину двох ОДЗ: для виразу  $\frac{1}{|x| - 4}$  та для виразу  $\sqrt{x}$ .

Друге ОДЗ ми вже обговорювали в попередньому випадку, а в ОДЗ дробу не входять ті значення змінної, при яких знаменник дробу перетворюється в 0. Тобто отримуємо:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \pm 4 \end{cases}$$

28.

	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2	X				
3		X			
4			X		

**Пояснення:** весь розв'язок завдання полягає в тому, щоб намалювати (або уявити) ці тіла та порахувати кількість їхніх граней. Найпростіше з кубом – в нього 6 граней. Тетраedr – це трикутна піраміда. А, отже, він має 4 грані. Трикутна призма складається з двох однакових трикутників, які з'єднані паралельними відрізками, тобто має 5 граней (2 основи та 3 бічних). Шестикутна піраміда має 7 граней (1 основа та 6 бічних).

29. 1,5

**Пояснення:** скористаємося формулою скороченого множення для квадрата суми та основною тригонометричною тотожністю:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

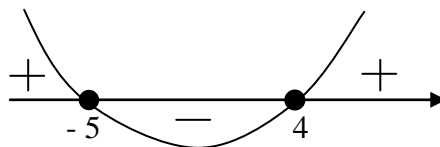
Тепер згадаємо формулу для синуса подвійного кута отримаємо:

$$1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha = 1 + \sin 30^\circ = 1 + 0,5 = 1,5.$$

30. -2

**Пояснення:** врахуємо ОДЗ: вирази під логарифмами повинні бути додатними -  

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ x + 20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) > 0 \\ x > -20 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-20; -2) \cup (0; +\infty) \text{ (верхня нерівність розв'язується за допомогою метода інтервалів).}$$
 Тепер, враховуючи, що логарифми мають однакові основи, які менше за одиницю, можемо відкинути логарифми попередньо змінивши знак нерівності на протилежний:  $x^2 + 2x \leq x + 20 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 \leq 0$ .



Ця нерівність розв'язується методом інтервалів:  $[-5; 4]$ . Рішенням початкової нерівності буде перетин цієї множини із ОДЗ:  $[-5; -2) \cup (0; 4]$ . Підрахуємо тепер суму цілих розв'язків:  $-5 + (-4) + (-3) + 1 + 2 + 3 + 4 = -2$ .

### 31. 6 км/год

**Пояснення:** як завжди в текстових задачах, позначимо через  $x$  невідоме – початкову швидкість репетитора. Тоді можна зауважити, що збільшення швидкості на 2 км/год призвело до зменшення запізнення на  $10 - 7 = 3$  хвилини. А, отже, різниця в часі між подорожжю із звичайною швидкістю та збільшеною дорівнює 3 хвилинам. Враховуючи, що час – це відстань поділена на швидкість, отримуємо:  $\frac{1,2}{x} - \frac{1,2}{x+2} = \frac{3}{60}$ . Треба

зауважити, що всі величини повинні вимірюватися в однакових одиницях – зокрема, 1200 м потрібно перевести в км – 1,2 км, а 3 хвилини в години –  $3/60$  (адже швидкість вимірюється в км/год). Це рівняння зводиться до квадратного:  $x^2 + 2x - 48 = 0$ , яке має два кореня: 6 та -8, але, оскільки швидкість повинна бути додатною, -8 відпадає.

### 32. 0,005 м<sup>2</sup>

**Пояснення:** варто пам'ятати, що якщо ми з'єднаємо середини сторін квадрата, то отримаємо не просто ромб, а знову квадрат. Але це не головне – головне те, що діагоналі цього ромбу будуть лініями, що сполучають середини протилежних сторін квадрата, а, отже, дорівнюють сторонам квадрата. Оскільки площа ромбу дорівнює половині добутку його діагоналей, то площа цього ромбу дорівнює половині площі квадрата, тобто,  $50 \text{ м}^2$ . Враховуючи, що відповідь просять навести в метрах квадратних, потрібно згадати, що в метрі 100 см, а в квадратному метрі 10000 квадратних см.

### 33. 5

**Пояснення:** в лівій частині рівняння стоїть сума квадратного кореня та модуля – двох завжди невід'ємних величин. Отже, ця сума може дорівнювати 0 тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 0 \\ |\log_2(y^2 - 10y + 22)| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y^2 - 10y + 22 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Найменше можливе значення  $x+y$  дорівнює 5.

### 34. 0,5

**Пояснення:** площа під графіком функції – це значення визначеного інтеграла від цієї функції. В даному випадку: границі інтегрування 1 та 2, а сам інтеграл виглядає так:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^2 = -\left. \frac{1}{x} \right|_1^2 = -0,5 + 1 = 0,5.$$

### 35. 2,56

**Пояснення:** вершина піраміди рівновіддалена від сторін основи, тобто проектується в центр вписаного кола основи, а оскільки у ромба центр вписаного кола співпадає з точкою перетину діагоналей, то висота піраміди дорівнює 24 см. З прямокутного

трикутника, утвореного висотою піраміди, апофемою (висотою бічної грані) та радіусом вписаного в ромб кола, можна знайти значення радіусу:  $\sqrt{26^2 - 24^2} = 10$  см. Висота ромба в два рази більша за його радіус: 20 см. Тоді можна знайти площу основи, як площу ромба: добуток довжини сторони ромба на його висоту:  $S = 20 \cdot 16 = 320$  см<sup>2</sup>. Тоді заходимо об'єм за формулою:  $V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 320 \cdot 24 = 2560$  см<sup>3</sup>. Відповідь: 2,56.