

Пояснення до завдань з МАТЕМАТИКИ пробного тестування «ЗІГЗАГ»-2012

1. Відповідь: Б

Пояснення. Необхідно скласти пропорцію, узявши в якості 100% - 140 балів, а 130% - x балів (кількість балів, яку необхідно набрати для виграшу суперечки).

2. Відповідь: А

Пояснення. Обидві частини рівняння необхідно привести до однакової основи (у даному випадку краще вибрати 2), скориставшись властивостями степенів: $2^{-2x} = 2^{\frac{1}{2}}$, а потім прирівняти показники степенів.

3. Відповідь: Д

Пояснення. Необхідно пам'ятати, що для того, щоб розділити на дріб, необхідно його перевернути та на нього помножити. Після цього залишиться скоротити, згадавши, що при діленні показники степенів віднімаються, а не діляться.

4. Відповідь: Г

Пояснення. Якщо використати формули приведення та скористатися тим, що косинус – функція парна, а період тангенса - π , то можна отримати: $a = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$,
 $b = \cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, $c = \operatorname{tg} 0 = 0$.

5. Відповідь: В

Пояснення. Для розв'язання цієї нерівності необхідно скористатися наслідком з теореми Вієта та розкласти чисельник дробу на множники: $\frac{(x-2)(x-3)}{x+1} \leq 0$. Після цього необхідно скористатися методом інтервалів, намалювавши «змійку». З відповіді $(-\infty; -1) \cup [2; 3]$ натуральними будуть лише числа 2 та 3.

6. Відповідь: Г

Пояснення. Якщо Тетяна може зіграти мелодію з імовірністю 0,6, то не зможе зіграти цю мелодію з імовірністю $p = 1 - 0,6 = 0,4$. Оскільки на третьому занятті Тетяна може зіграти дві мелодії, то імовірність того, що вона жодну з них не зіграє, дорівнює добутку $0,4 \cdot 0,4 = 0,16$.

7. Відповідь: А

Пояснення. Координати вектора $\vec{a} = (-4; -3)$, а отже, його довжина дорівнює кореню із суми квадратів його координат, тобто - 5.

8. Відповідь: Г

Пояснення. Оскільки гілки параболи направлені вниз, то коефіцієнт a від'ємний. Точка $(0; c)$ – це точка перетину параболи з віссю ординат, і оскільки вона знаходиться нижче від вісі Ox , то c – також від'ємне. Тепер розглянемо вершину параболи – вона має додатну абсцису, а оскільки: $x_a = -\frac{b}{2a}$, то коефіцієнт b додатний.

9. Відповідь: Г

Пояснення. Похідна дорівнює 0 в тих точках, у яких функція не зростає і не спадає. Якщо при цьому відбувається зміна знаку похідної, то такі точки називаються екстремумами. На даному графіку чітко видно 3 екстремуми, з чого можна зробити висновок, що зазначене рівняння має 3 корені.

10. Відповідь: Д

Пояснення. Дана нерівність еквівалентна системі нерівностей: $\begin{cases} x+1 < 1 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0$.

Перша нерівність випливає з того, що основа логарифма менша за 1, а друга відповідає ОДЗ даної нерівності.

11. Відповідь: Г

Пояснення. Легко побачити, що мова іде про арифметичну прогресію, перший член якої дорівнює 300, а різниця – 100. При цьому потрібно знайти суму восьми її перших членів.

12. Відповідь: А

Пояснення. $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt[3]{-27} = |-3| + (-3) = 0$. Необхідно пам'ятати, що має місце така рівність: $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, n - \text{непарне} \\ |x|, n - \text{парне} \end{cases}$.

13. Відповідь: Г

Пояснення. Твердження **А** випливає з властивості непарної функції, **Б** – з властивостей функції $y = \log_a x$ при основі, що менше 1, **В** – з того, що період функції

$T(f(kx+b)) = \frac{1}{k} T(f(x))$, **Д** – з властивостей тангенса. А ось твердження **Г** – невірне, через те що для цього перетворення потрібно відобразити симетрично лише ту частину, що знаходиться справа від осі Oy , а те, що зліва, потрібно видалити.

14. Відповідь: В

Пояснення. Якщо перефразувати питання задачі, то треба з перелічених чисел вибрати те, яке дає остачу 4 при діленні на 7.

15. Відповідь: А

Пояснення. Достатньо перенести вираз із косинусом в одну частину, а всі інші вирази – в іншу, а потім поділити обидві частини на коефіцієнт при косинусі.

16. Відповідь: Д

Пояснення. Твердження **А** невірне через те, що в центрі описаного кола перетинаються серединні перпендикуляри, а медіани перетинаються в центрі мас трикутника. Твердження **Б** невірне, адже довжина медіани дорівнює довжині висоти $-\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Твердження **В** – медіана гіпотенузи дорівнює половині гіпотенузи. Твердження **Г** – медіани в точці перетину діляться у відношенні 2:1. А ось твердження **Д** – вірне, адже ці два трикутники мають спільну висоту та рівні основи.

17. Відповідь: В

Пояснення. Найпростіше розв'язання – обвести навколо цього трикутника прямокутник так, щоб усі три вершини трикутника лежали на сторонах прямокутника, а

потім порахувати площу трикутника як різницю між площею прямокутника та трьох прямокутних трикутників.

18. Відповідь: Б

Пояснення. Радіус даного кола дорівнює половині діагоналі квадрата - $2\sqrt{2}$ см. А сторона квадрата, який описаний навколо кола, дорівнює діаметру кола - $4\sqrt{2}$ см. Отже, його площа дорівнює 32 см^2 .

19. Відповідь: Б

Пояснення. Формула для об'єму циліндра: $V = \pi R^2 H$, тому збільшення висоти у 3 рази дасть збільшення об'єму у 3 рази, а ось зменшення радіуса у 2 рази призведе до зменшення об'єму у 4 рази.

20. Відповідь: В

Пояснення. Якщо відняти від площі повної поверхні конуса площу бічної поверхні, то отримаємо площу основи – отже, можна знайти радіус основи – 6 см. Після цього з формули для площі бічної поверхні конуса: $S = \pi R l$, можна знайти довжину твірної конуса – 10 см, а далі – висоту – 8 см.

21. Відповідь:

	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2			X		
3		X			
4	X				

Пояснення: **1** – графік логарифма можна пізнати за такими ознаками: ODZ – лише додатні x , основа – менша 1, а отже, функція спадає, Oy – вертикальна асимптота; **2** – можна впізнати через те, що функція приймає лише від'ємні значення, Ox – горизонтальна асимптота, а оскільки основа менша за 1 та є знак перед функцією «-», то функція зростає; **3** – гіпербола, вітки якої лежать у II та VI чвертях через знак «-» перед функцією. **4** – вітка параболи, ODZ – лише невід'ємні x , область значень – лише невід'ємні y .

22. Відповідь:

	А	Б	В	Г	Д
1		X			
2			X		
3					X
4				X	

Пояснення:

$$1 \frac{x-3}{x^2-6x+9} - \frac{3x-12}{3x^2-48} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+4} = \frac{7}{(x-3)(x+4)}.$$

$$2 \sqrt[6]{x^2} \cdot \sqrt[9]{x^{15}} = \sqrt[3]{|x|} \cdot \sqrt[3]{x^5} = -\sqrt[3]{x^6} = -x^2.$$

$$3 \log_9(-3x) + \log_3 2 = \log_9(-12x).$$

$$4 \sin(\pi x) + \cos(\pi x) + \operatorname{tg}(\pi x) + \operatorname{ctg}(\pi x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 1 = -2.$$

23. Відповідь:

	А	Б	В	Г	Д
1	×				
2			×		
3				×	
4		×			

Пояснення. Тетраедр – це трикутна піраміда, паралелепіпед – чотирикутна призма. Кількість граней піраміди на 1 більша кількості вершин многокутника, що лежить в основі, кількість граней призми – на 2.

24. Відповідь:

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2	×				
3		×			
4					×

Пояснення: оскільки трапеція описана, то сума довжин її протилежних сторін рівні, а отже, сума довжин основ трапеції дорівнює 12 см, звідки можна знайти середню лінію – 6 см. Знаючи висоту та бічну сторону, можна знайти різницю між основами – 10 см. Звідки легко знайти, що більша основа дорівнює 11 см, а менша – 1 см. Довжина діагоналі знаходиться з прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 6 см і $\sqrt{11}$ см.

25. Відповідь: 36

Пояснення. Якщо позначити за x швидкість Кирила до збільшення, то рівняння для розв'язання задачі буде таким: $\frac{4,2}{x} - \frac{4,2}{x+1} = 0,1$ (необхідно не забувати переводити всі величини в одну систему одиниць).

26. Відповідь: 2

Пояснення. Швидкість тіла дорівнює похідній від координати, а зупиниться тіло у той момент, коли його швидкість дорівнюватиме 0. Отже, потрібно взяти похідну та прирівняти її до 0. Отримуємо відповідь – 2 с.

27. Відповідь: 363

Пояснення. Варіантів забиття 1-ого гола в Івана 3, 2-ох голів – 3^2 (адже кожен гол він може забити трьома способами) і т.д. Отже, всього варіантів – $3+3^2+3^3+3^4+3^5$. Цю суму можна обраховувати вручну, а можна за допомогою формули для суми перших 5 членів геометричної прогресії із першим членом та знаменником 3.

28. Відповідь: -7

Пояснення: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+3x-1} \leq 27^{x-2} \Leftrightarrow 3^{-x^2-3x+1} \leq 3^{3x-6} \Leftrightarrow -x^2-3x+1 \leq 3x-6$. Ця нерівність

зводиться до звичайної квадратної нерівності, яка розв'язується методом інтервалів – $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$. Найбільший від'ємний розв'язок -7.

29. Відповідь: 90

Пояснення. Якщо площі трикутників відносяться як 9:1, то коефіцієнт подібності дорівнює 3. Отже, якщо найбільша сторона другого трикутника дорівнює 14 см, то найбільша сторона більшого трикутника дорівнює 42 см. Дві інші сторони його можна

позначити через $3x$ та $5x$. Якщо далі записати теорему косинусів для даного трикутника, то можна знайти $x = 6$ см. А отже, периметр більшого трикутника дорівнює 90 см.

30. Відповідь: 64

Пояснення. Якщо усі бічні грані піраміди нахилені до основи під однаковим кутом, то вершина піраміди проектується у центр вписаного кола основи, а якщо у паралелограм можна вписати коло, то цей паралелограм – ромб. Знаючи висоту піраміди та кут нахилу бічних граней, можна знайти апофему – 4 см та радіус вписаного кола ромбу – $2\sqrt{3}$ см. Знаючи радіус вписаного кола та гострий кут ромба, можна знайти його сторону – 8 см. А отже, площа бічної поверхні дорівнює 64 см².

31. Відповідь: 4,5

Пояснення. Площа фігури, що обмежена двома графіками, – це визначений інтеграл від різниці двох функцій. Якщо знайти точки перетину графіків та намалювати їх, можна отримати формулу для обчислення площі: $S = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = 4,5$.

32. Відповідь: 0,5

Пояснення: $x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$; отже ліва частина більша за 1,75, а права частина $2(1 - 2^{-\sin(\pi x) - 2}) = 2 - 2^{-\sin(\pi x) - 1} \leq 2 - 2^{-2} = \frac{7}{4}$ менша за 1,75 через те, що найбільше значення синуса – 1. Отже, рівність можлива лише за умови, що обидві частини дорівнюють 1,75. Це можливо лише при $x = 0,5$.